2. Основные методы интегрирования

№ п/п	Вид интеграла	Метод интегрирования	Параграф, в котором описан метод
1	2	3	4
1	$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$	Подстановка $\varphi(x)=u$, $\varphi'(x)dx=du$	8.4
2	$\int P_n(x)e^{kx}dx$, $\int P_n(x)\sin kxdx$, $\int P_n(x)\cos kxdx$	Интегрирование по частям $\int udv = uv - \int vdu$. (Положить $u=P_n(x)$.)	8.4
3	$\int P_n(x)\ln xdx$, $\int P_n(x)\arcsin xdx$, $\int P_n(x)\arccos xdx$, $\int P_n(x)\,\mathrm{arctg}\, xdx$, $\int P_n(x)\,\mathrm{arcctg}\, xdx$	Интегрирование по частям $\int udv = uv = \int vdu$. (За u принять множитель при $P_n(x)$.)	8.4
4	$\int e^{ax}\cos bxdx$, $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int \sin(\ln x)dx$, $\int \cos(\ln x)dx$	Двукратное интегрирование по частям	8.4

1	2	3	4
5	$\int \frac{dx}{x^2+px+q}$ $(p^2-4q<0)$	Выделение полного квадрата x^2+ $+px+q=(x+p/2)^2+(q-p^2/4)$ [redacted]	8.6
6	$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$	Выделяя в числителе дифференциал знаменателя, представляют интеграл в виде суммы интегралов $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$ и $\int \frac{du}{u}$, где $u=x^2+$ $+px+q$	8.6
7	$I_n=\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$	Применение рекуррентной формулы $I_n=\frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}+\right.$ $\left.+\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}\right)$	8.6
8	$\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^n}$ $(p^2-4q<0)$	Тот же, что и для интегралов, рассмотренных в п. 6. В результате получается интеграл из п. 7	8.6
9	$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx$	Выделение целой части (если $n\geqslant$ $\geqslant m$), разложение знаменателя $Q_m(x)$ на множители вида $(x-\alpha)^k$ и $(x^2+$ $+px+q)^s$ и разложение рациональной дроби $P_n(x)/Q_m(x)$ на простейшие дроби	8.7
10	$\int R(\sin x,\ \cos x)dx$	Универсальная подстановка $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=t$, тогда $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=$ $=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, или частные подстановки: 1) если $R(-\sin x,$ $\cos x)=-R(\sin x,\ \cos x)$, то $\cos x=$ $=t$; 2) если $R(\sin x,\ -\cos x)=$ $=-R(\sin x,\ \cos x)$, то $\sin x=t$; 3) если $R(-\sin x,\ -\cos x)=R(\sin x,$ $\cos x)$, то $\mathrm{tg}\,x=t$	8.8
11	$\int \sin^m x\cos^n x dx$	Универсальная или частные подстановки: 1) если $m, n\in \mathbb{N}$ и m, n — четные числа, то производится понижение степени формулами $\sin^2 x=$ $=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+$ $+\cos 2x)$; 2) если m — нечетное положительное число, то применяется подстановка $\cos x=t$; 3) если n — нечетное положительное число, то используется подстановка $\sin x=t$	8.8

или замена $t=\frac{1}{2}(x^2+px+q)'$

1	2	3	4
12	$\int \cos mx\cos nxdx$, $\int \sin mx\cos nxdx$, $\int \sin mx\sin nxdx$	Разложение подынтегральной функции по формулам: $\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}(\cos(m+n)x+$ $+\cos(m-n)x)$, $\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}(\sin(m+n)x+$ $+\sin(m-n)x)$, $\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}(-\cos(m+n)x+$ $+\cos(m-n)x)$	8.8
13	$\int R(x,\ \sqrt[n_1]{x^{m_1}},\ \sqrt[n_2]{x^{m_2}},\ \ldots)dx$	Подстановка $x=t^s$, где s — общий знаменатель дробей m_1/n_1, m_2/n_2, ...	8.9
14	$\int R\left(x,\ \sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}},\ \sqrt[n_2]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2}},\ \ldots\right)dx$	Подстановка $\frac{ax+b}{cx+d}=t^s$, где s — общий знаменатель дробей m_1/n_1, m_2/n_2, ...	8.9
15	$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ см. п. 5,6	Выделение полного квадрата в подкоренном выражении и линейная подстановка	8.9
16	$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ см. п. 5,6.	Выделяя в числителе производную подкоренного выражения, представляют интеграл в виде суммы интегралов $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ и $\int \frac{du}{\sqrt{u}}$, где $u=ax^2+bx+c$	8.9
17	$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$	Подстановка $x=1/t$, приводящая к интегралам вида $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	8.9
18	$\int R(x,\ \sqrt{a^2-x^2})dx$, $\int R(x,\ \sqrt{x^2+a^2})dx$, $\int R(x,\ \sqrt{x^2-a^2})dx$	Рационализация с помощью одной из следующих подстановок: $x=$ $=a\sin t$ (или $x=a\cos t$), $x=a\,\mathrm{tg}\,t$ (или $x=a\,\mathrm{ctg}\,t$), $x=\frac{a}{\cos t}$ $\left(\text{или } x=\right.$ $\left.=\frac{a}{\sin t}\right)$	8.9
19	$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})dx$	Выделение полного квадрата в подкоренном выражении и линейная подстановка, приводящая к одному из интегралов, рассмотренных в п. 18	8.9